Foncteurs dérivés

Louis Mallet-Burgues

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. On rappelle que par des énoncés de base sur les catégories abéliennes, on peut faire comme si $\mathcal{A}$ était une catégorie de modules sur un anneau et jouer avec des éléments d'un objet (même sans aller chercher de tels énoncés, on peut appeler élément d'un objet A de $\mathcal{A}$ un morphisme de but A, et le lemme de Yoneda justifie alors que ces objets déterminent A). Dans la suite, on se permettra de traiter $\mathcal{A}$ comme une catégorie de modules.
On note $\mathrm{Ch}^+(\mathcal{A})$ la catégorie des complexes de cochaînes sur $\mathcal{A}$ dont tous les termes sont nuls en degré suffisament petit (un tel complexe est dit semi-borné). On note $\mathcal{H}^+(\mathcal{A})$ la catégorie d'homotopie associée et $\mathcal{D}^+(\mathcal{A})$ la catégorie dérivée, qui d'obtient comme localisation de $\mathrm{Ch}^+(\mathcal{A})$ (ou de $\mathcal{H}^+(\mathcal{A})$) par les quasi-isomorphismes.

Étant donné un foncteur additif $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ entre deux catégories abéliennes, F induit un foncteur au niveau des catégories de complexes de cochaînes et ce foncteur préserve clairement les homotopies donc induit un foncteur $\mathcal{H}^+(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{H}^+(\mathcal{B})$, encore noté F. Il n'est pas vrai en général que ce foncteur envoie les quasi-isomorphismes sur des (composées de) quasi-isomorphismes :

Exemple 1. Considérons le foncteur Ab $\longrightarrow$ Ab de tensorisation par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Le complexe $\mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z}$ est quasi-isomorphe au complexe $0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ mais leurs images par $\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ n'ont pas la même cohomologie.

Il n'est donc pas raisonnable en général de chercher un foncteur $\mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{D}^+(\mathcal{B})$ qui fasse commuter (à isomorphisme naturel près) le diagramme de foncteurs suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}^+(\mathcal{A}) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "Q"'] & \mathcal{H}^+(\mathcal{B}) \arrow[d, "Q"] \\
\mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \arrow[r, "\mathcal{D}(F)"'] & \mathcal{D}^+(\mathcal{B})
\end{tikzcd}$$

avec Q le foncteur de localisation.
On va tout de même construire, avec des bonnes hypothèses sur les catégories $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, un foncteur $RF : \mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{D}^+(\mathcal{B})$ (foncteur dérivé total à droite de F) qui soit satisfaisant.
On peut aussi construire de façon similaire un foncteur dérivé à gauche mais la théorie est complétement similaire (en considérant des complexes bornés de l'autre côté).

Définition 2. Soit $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un foncteur additif entre deux catégories abéliennes. Un foncteur dérivé total à droite de F, $RF : \mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{D}^+(\mathcal{B})$ est un représentant du foncteur suivant :

$$\begin{cases} \mathrm{Fun}(\mathcal{D}^+(\mathcal{A}), \mathcal{D}^+(B)) \longrightarrow \mathrm{Set} \\ G \mapsto \mathrm{Nat}(Q \circ F, G \circ Q) \end{cases}.$$

En résumé, on a une bijection naturelle en G :

$$\mathrm{Nat}(RF, G) \cong \mathrm{Nat}(Q \circ F, G \circ Q).$$

Si on déplie un peu plus la définition, cela se traduit par l'existence d'une transformation naturelle $Q \circ F \xrightarrow{\eta} RF \circ Q$ telle que pour tout foncteur $\mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \xrightarrow{G} \mathcal{D}^+(B)$ et toute transformation naturelle $Q \circ F \xrightarrow{\alpha} G \circ Q$, il existe une unique transformation naturelle $RF \xrightarrow{\beta} G$ telle que la composée :

$$Q \circ F \xrightarrow{\eta} (RF) \circ Q \xrightarrow{\beta Q} G \circ Q$$

soit égale à α.

Par le lemme de Yoneda, un tel couple (η, RF) est unique à unique isomorphisme près s'il existe. Maintenant qu'on sait ce qu'on cherche, il n'y a plus qu'à le trouver !

I Une description explicite de la catégorie dérivée

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne *possédant assez d'injectifs*. On se propose de donner une description très simple de $\mathcal{D}^+(\mathcal{A})$ en terme de complexes d'objets injectifs.
Notons $\mathcal{I}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{A}$ formée des objets injectifs, $\mathrm{Ch}^+(\mathcal{I})$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Ch}^+(\mathcal{A})$ formée des complexes en objets injectifs, et $\mathcal{H}^+(\mathcal{I})$ la sous-catégorie de $\mathcal{H}^+(\mathcal{A})$ formée des complexes en objets injectifs.
On a naturellement un foncteur :

$$\mathcal{H}^+(\mathcal{I}) \longrightarrow \mathcal{D}^+(\mathcal{A})$$

obtenu comme composée de Q et de l'inclusion $\mathcal{H}^+(\mathcal{I}) \longrightarrow \mathcal{H}^+(\mathcal{A})$.
L'objet de cette section est de démontrer le théorème suivant.

Théorème 3. Si $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne possédant assez d'injectifs, alors le foncteur naturel :

$$\mathcal{H}^+(\mathcal{I}) \longrightarrow \mathcal{D}^+(\mathcal{A})$$

est une équivalence de catégories.

Pour ce faire, nous allons construire un quasi-inverse à ce foncteur. En effet, la connaissance explicite d'un quasi-inverse sera très utile.

I.1 Complexes doubles et complexe total

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. La catégorie des complexes de cochaînes sur $\mathcal{A}$ est notée $\mathrm{Ch}(\mathcal{A})$. Un complexe double sur $\mathcal{A}$ est un objet X de la catégorie abélienne $\mathrm{Ch}(\mathrm{Ch}(\mathcal{A}))$.
On choisit la convention d'indexation suivante : on note $X^{i,\bullet}$ le i-ème terme de X en voyant X comme un complexe à termes dans $\mathrm{Ch}(\mathcal{A})$, et $\partial : X^{i,\bullet} \longrightarrow X^{i+1,\bullet}$ les morphismes cobords (dits horizontaux). Plus précisément on a pour tous i, j :

$$\partial^{i,j} : X^{i,j} \longrightarrow X^{i+1,j}$$

où $X^{i,j}$ est le j-ème terme du complexe $X^{i,\bullet}$. Les cobords du complexe $X^{i,\bullet}$ sont notés d (ou $d^{i,j}$). En résumé on a la situation suivante :

$$\begin{tikzcd} X^{i,j} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "d"'] & X^{i+1,j} \arrow[d, "d"] \\ X^{i,j+1} \arrow[r, "\partial"'] & X^{i+1,j+1} \end{tikzcd}$$

et la condition d'être un complexe de complexes se traduit par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} dd &= 0 \\ \partial\partial &= 0 \\ \partial d &= d\partial. \end{aligned}$$

On retiendra que d augmente l'indice j et que ∂ augmente l'indice i (évidemment il existe d'autres conventions mais nous tâcherons de garder celle-ci).

Un morphisme dans cette catégorie $X^{\bullet,\bullet} \xrightarrow{f^{\bullet,\bullet}} Y^{\bullet,\bullet}$ est bien-entendu la donnée de flèches $X^{i,j} \xrightarrow{f^{i,j}} Y^{i,j}$ qui commutent aux bords horizontaux et verticaux.
Il est bien sûr possible de considérer des complexes de toute dimension, mais on espère ici que la dimension 2 suffira.
On dit qu'un complexe double est semi-borné (il faudrait dire 1/4-borné) s'il existe $R > 0$ tel que $X^{i,j} = 0$ dès que $i < R$ ou $j < R$. Étant donné un complexe double semi-borné $X^{\bullet,\bullet}$, on lui associe un complexe semi-borné $\mathrm{Tot}(X)$ appelé *complexe total*, de la façon suivante :

$$\mathrm{Tot}(X)^n = \bigoplus_{i+j=n} X^{i,j}.$$

On notera que la somme est finie car X est semi-borné, et que pour tout n suffisament petit, $\mathrm{Tot}(X)^n = 0$, de sorte que $\mathrm{Tot}(X)$ est semi-borné. Les morphismes bords sont définis de la façon suivante :

$$\mathrm{Tot}(X)^n \xrightarrow{\delta} \mathrm{Tot}(X)^{n+1}$$

par la formule suivante :

$$\delta = \partial + (-1)^i d$$

ce qui signifie que δ s'obtient en sommant les morphismes $X^{i,j} \longrightarrow X^{i+1,j} \oplus X^{i,j+1}$ qui envoient x sur $\partial x + (-1)^i dx$.

Lemme 4. On a $\delta\delta = 0$ et la construction Tot donne un foncteur additif $\mathrm{Ch}_2^+(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathrm{Ch}^+(\mathcal{A})$ de la catégorie des complexes doubles semi-bornés vers la catégorie des complexes semi-bornés.

Démonstration. On a, pour $x \in X^{i,j}$:

$$\delta\delta(x) = \delta(\partial x + (-1)^i dx) = \delta\partial x + (-1)^i \delta dx = \partial\partial x + (-1)^{i+1} d\partial x + (-1)^i \partial dx + (-1)^i ddx = 0$$

car $\partial x \in X^{i+1,j}$.
Ensuite, si $X \xrightarrow{f} Y$ est un morphisme de complexes doubles semi-bornés, il induit pour tout n :

$$\mathrm{Tot}(X)^n \longrightarrow \mathrm{Tot}(Y)^n$$

via $X^{i,j} \xrightarrow{f^{i,j}} Y^{i,j}$ pour $i + j = n$ et il est facile de vérifier que ça commute à δ. $\square$

L'énoncé suivant capture l'essence du calcul avec des suites spectrales. On ne suppose pas cet outil connu et on le fait donc à la main.

Proposition 5. Soit $X^{\bullet,\bullet}$ un complexe double semi-borné à lignes exactes. Alors $\mathrm{Tot}(X)$ est un complexe acyclique (autrement dit une suite exacte longue).

Démonstration. Quitte à translater X en posant $Y^{i,j} = X^{i-N,j-N}$ avec N suffisament grand, ce qui ne change pas l'exactitude des lignes et ne fait que translater le complexe $\mathrm{Tot}(X)$ sans changer son caractère acyclique, on peut supposer que X est nul en degrés négatifs :

$$X^{i,j} = 0$$

dès que $i < 0$ ou $j < 0$. En notant T le complexe total, on a aussi $T^n = 0$ pour $n < 0$.
Montrons alors que T est acyclique. Soit $n \geq 0$ et $\alpha \in T^n$ tel que $\delta\alpha = 0$. On décompose α :

$$\alpha = \sum_{i+j=n} x^{ij}$$

avec $i, j \geq 0$. L'équation $\delta\alpha = 0$ devient alors :

$$\begin{aligned} \partial x^{n,0} &= 0 \\ \partial x^{i-1,j} + (-1)^i dx^{i,j-1} &= 0 \quad \forall i + j = n + 1 \\ dx^{0,n} &= 0. \end{aligned}$$

On encourage le lecteur à traiter soi-même les petits cas pour trouver la formule de récurrence suivante.
On fait la convention que $x^{i,j} = 0$ si $i < 0$ ou $j < 0$.
Construisons par récurrence sur $k \geq 0$ un élément $y^{n-1-k,k} \in X^{n-1-k,k}$ de sorte que :

$$\boxed{\partial y^{n-1-k,k} = dy^{n-k,k-1} + \varepsilon_k x^{n-k,k}}$$

avec :

$$\varepsilon_k = (-1)^{n+(n-1)+\cdots+(n-k+1)}.$$

Encore une fois on convient que $y^{i,j} = 0$ dès qu'un des indices est strictement négatif.
Pour $k = 0$, puisque $\partial x^{n,0} = 0$ et que les lignes sont exactes, il existe $y^{n-1,0}$ tel que :

$$\partial y^{n-1,0} = x^{n,0} = dy^{n,-1} + \varepsilon_0 x^{n,0}$$

à condition de poser $y^{n,-1} = 0$.
Supposons $k \geq 1$ et le cas $k-1$ traité et construisons $y^{n-1-k,k}$. On part de :

$$\partial y^{n-k,k-1} = dy^{n-k+1,k-2} + \varepsilon_{k-1} x^{n-k+1,k-1}$$

et on applique d pour obtenir :

$$\partial dy^{n-k,k-1} = \varepsilon_{k-1} dx^{n-k+1,k-1} = \varepsilon_{k-1}(-1)^{n-k} \partial x^{n-k,k}$$

L'exactitude des lignes donne donc un $y^{n-1-k,k}$ qui vérifie :

$$\partial y^{n-1-k,k} = dy^{n-k,k-1} + (-1)^{n-k-1} \varepsilon_{k-1} x^{n-k,k} = dy^{n-k,k-1} + \varepsilon_k x^{n-k,k}$$

ce qui termine la récurrence.
On pose alors :

$$z^{n-1-k,k} = \varepsilon_k y^{n-1-k,k}$$

de sorte que :

$$\delta z^{n-1-k,k} = x^{n-k,k} + (-1)^{n+k+1}(dz^{n-1-k,k} + dz^{n-k,k-1}).$$

Ainsi en posant :

$$\beta = \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k,k} \in T^{n-1}$$

on obtient par télescopage :

$$\delta\beta = \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k,k} + dz^{0,n-1} = \alpha$$

car $dz^{0,n-1} = \varepsilon_{n-1} dy^{0,n-1} = -\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n x^{0,n} = x^{0,n}$ puisque $y^{-1,n} = 0$. □

Corollaire 6. Soit $C^\bullet$ un complexe semi-borné (que l'on note verticalement) et soit :

$$(*) \quad 0 \longrightarrow C^\bullet \xrightarrow{u} X^{0,\bullet} \xrightarrow{\partial} X^{1,\bullet} \xrightarrow{\partial} X^{2,\bullet} \xrightarrow{\partial} \dots$$

un complexe dont les termes forment un double complexe semi-borné.
On dispose alors d'un morphisme canonique de complexes :

$$C^\bullet \xrightarrow{v} \mathrm{Tot}(X)$$

défini par $C^n \xrightarrow{u^n} X^{0,n} \subseteq \mathrm{Tot}(X)^n$.
De plus, si $(*)$ est une suite exacte, alors v est un quasi-isomorphisme.

Démonstration. On vérifie d'abord que v est un morphisme de complexes, pour $x \in C^n$:

$$\delta v(x) = (\partial + (-1)^0 d)u(x) = du(x) = ud(x) = vd(x)$$

en notant aussi d le cobord de $C^\bullet$.
On suppose maintenant que la suite $(*)$ est exacte. On note Y le complexe double semi-borné formé de la concaténation de X et C, autrement dit $Y^{-1,j} = C^j$ et $Y^{i,j} = X^{i,j}$ pour $i \geq 0$, avec les cobords évidents. Les lignes de ce complexe double sont exactes donc $\mathrm{Tot}(Y)$ est acyclique par le lemme précédent.
Posons C' le complexe C décalé d'un cran au sens suivant :

$$(C')^j = C^{n+1}$$

avec les cobords *opposés de ceux de* C (on a bien sûr $H^k(C') = H^{k+1}(C)$ pour tout k). On a ainsi une suite exacte courte de complexes :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tot}(X) \longrightarrow \mathrm{Tot}(Y) \longrightarrow C' \longrightarrow 0$$

où la première flèche est induite par l'inclusion $X \hookrightarrow Y$ et la deuxième est la projection $\mathrm{Tot}^n(Y) \longrightarrow C^{n+1}$. On laisse au lecteur le soin de vérifier que cette deuxième flèche commute bien aux cobords.
La suite exacte longue en cohomologie et l'acyclicité de Y donnent alors pour tout n un isomorphisme :

$$H^{n+1}(C) = H^n(C') \xrightarrow{\nabla} H^{n+1}(\mathrm{Tot}(X))$$

et il est facile de voir que cet isomorphisme est bien induit par v en reprenant la construction du morphisme connectant. □

I.2 Résolution de Cartan-Eilenberg

Lemme 7. (du fer à cheval) Considérons le diagramme suivant dans $\mathcal{A}$:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & & & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & I^0 \arrow[r] & I^1 \arrow[r] & I^2 \arrow[r] & \dots \\
 & B \arrow[d] & & & & \\
0 \arrow[r] & C \arrow[r] \arrow[d] & J^0 \arrow[r] & J^1 \arrow[r] & J^2 \arrow[r] & \dots \\
 & 0 & & & &
\end{tikzcd}$$

avec les lignes exactes et la première colonne exacte et les I^k, J^k injectifs. Un tel diagramme peut être complété en :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & & & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & I^0 \arrow[r] \arrow[d] & I^1 \arrow[r] \arrow[d] & I^2 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d] & I^0 \oplus J^0 \arrow[r] \arrow[d] & I^1 \oplus J^1 \arrow[r] \arrow[d] & I^2 \oplus J^2 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
0 \arrow[r] & C \arrow[r] \arrow[d] & J^0 \arrow[r] & J^1 \arrow[r] & J^2 \arrow[r] & \dots \\
 & 0 & & & &
\end{tikzcd}$$

où les morphismes verticaux sont les morphismes canoniques.

La preuve peut être trouvée dans n'importe quel cours d'algèbre homologique, et c'est un bon exercice. On en tire la proposition suivante.

Proposition 8. (Résolution de Cartan-Eilenberg)
Supposons que $\mathcal{A}$ a assez d'injectifs. Soit $C^\bullet$ un complexe semi-borné. Il existe un double complexe semi-borné $I^{\bullet,\bullet}$ avec $I^{ij} = 0$ pour $i < 0$, les I^{ij} injectifs, et des morphismes comme ceci :

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & C^0 \arrow[r] \arrow[d] & I^{0,0} \arrow[r] \arrow[d] & I^{1,0} \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
0 \arrow[r] & C^1 \arrow[r] \arrow[d] & I^{0,1} \arrow[r] \arrow[d] & I^{1,1} \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

et tel que ce diagramme soit à lignes exactes.

Démonstration. On dévisse le complexe $C^\bullet$ en les suites exactes suivantes :

$$0 \longrightarrow Z^n \longrightarrow C^n \xrightarrow{d} B^{n+1} \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow B^n \longrightarrow Z^n \longrightarrow H^n \longrightarrow 0$$

avec $Z^n = \operatorname{Ker} d^n$, $B^n = \operatorname{Im} d^{n-1}$ et $H^n = H^n(C)$.
On définit I^{ij} récursivement. On pose $I^{ij} = 0$ pour $i < 0$ ainsi que pour j suffisament petit pour que C^j soit nul. Ainsi I^{ij} sera semi-borné une fois construit.
On construit par récurrence sur j les objets suivants (l'initialisation se fait en mettant tout à zéro en bas degré).
Supposons qu'on a déjà construit au rang d'avant une résolution injective :

$$0 \longrightarrow Z^j \longrightarrow J_Z^{\bullet,j}$$

On construit alors, comme $\mathcal{A}$ a assez d'injectifs, une résolution injective :

$$0 \longrightarrow B^{j+1} \longrightarrow J_B^{\bullet,j+1}$$

et on utilise le lemme du fer à cheval 7 pour obtenir une résolution injective $I^{\bullet,j}$ de C^j de sorte qu'on ait un diagramme commutatif à colonnes et lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & Z^j \arrow[r] \arrow[d] & J_Z^{0,j} \arrow[r] \arrow[d] & J_Z^{1,j} \arrow[r] \arrow[d] & J_Z^{2,j} \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
0 \arrow[r] & C^j \arrow[r] \arrow[d] & I^{0,j} \arrow[r] \arrow[d] & I^{1,j} \arrow[r] \arrow[d] & I^{2,j} \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
0 \arrow[r] & B^{j+1} \arrow[r] \arrow[d] & J_B^{0,j+1} \arrow[r] \arrow[d] & J_B^{1,j+1} \arrow[r] \arrow[d] & J_B^{2,j+1} \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

De même, grâce au lemme du fer à cheval on construit un diagramme similaire (notez qu'on garde les mêmes $J_B^{j+1,\bullet}$) :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & B^{j+1} \arrow[r] \arrow[d] & J_B^{0,j+1} \arrow[r] \arrow[d] & J_B^{1,j+1} \arrow[r] \arrow[d] & J_B^{2,j+1} \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
0 \arrow[r] & Z^{j+1} \arrow[r] \arrow[d] & J_Z^{0,j+1} \arrow[r] \arrow[d] & J_Z^{1,j+1} \arrow[r] \arrow[d] & J_Z^{2,j+1} \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
0 \arrow[r] & H^{j+1} \arrow[r] \arrow[d] & J_H^{0,j+1} \arrow[r] \arrow[d] & J_H^{1,j+1} \arrow[r] \arrow[d] & J_H^{2,j+1} \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Une fois tout ceci construit, on définit le morphisme de cobord vertical :

$$I^{i,j} \longrightarrow I^{i,j+1}$$

comme la composée

$$I^{i,j} \longrightarrow J_B^{i,j+1} \longrightarrow J_Z^{i,j+1} \longrightarrow I^{i,j+1}.$$

Il est alors facile de vérifier que l'on a bien des suites exactes (on a simplement recollé des suites exactes courtes en une suite exacte longue). $\square$

Corollaire 9. Soit $C^\bullet$ un complexe semi-borné. Il existe alors $I^\bullet$ un complexe semi-borné formé d'objets injectifs et un quasi-isomorphisme :

$$C^\bullet \longrightarrow I^\bullet.$$

Démonstration. On applique d'abord la proposition 8 pour obtenir un double complexe $I^{\bullet,\bullet}$ et on considère le complexe total associé $J^\bullet$. Par le corollaire 6, on a alors un quasi-isomorphisme $C^\bullet \longrightarrow J^\bullet$ et $J^\bullet$ est à termes injectifs car ses termes sont des sommes directes finies d'injectifs. □

I.3 Preuve du théorème

On peut enfin démontrer le théorème 3. Soit donc $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne avec assez d'injectifs. Le but est de construire un quasi-inverse au foncteur :

$$\mathcal{H}^+(\mathcal{I}) \longrightarrow \mathcal{D}^+(\mathcal{A})$$

décrit précedemment. On commence par construire un foncteur :

$$\mathrm{Ch}^+(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{H}^+(\mathcal{I})$$

que l'on étendra à la catégorie dérivée par localisation.
On commence par choisir (on ignore ici les problèmes de théorie des ensembles, d'ailleurs dans beaucoup de contextes le choix peut-être complétement canonique), pour chaque complexe semi-borné $C^\bullet$ sur $\mathcal{A}$, un complexe semi-borné d'injectifs $I_C^\bullet$ et un quasi-isomorphisme :

$$\eta_C : C \longrightarrow I_C.$$

Lemme 10. Soit $u : X^\bullet \longrightarrow I^\bullet$ un morphisme de complexes semi-bornés avec $X^\bullet$ acyclique et $I^\bullet$ à termes injectifs. Alors u est homotope à 0.

Démonstration. On construit récursivement $s^k : X^k \longrightarrow I^{k-1}$ qui vérifie :

$$ds + sd = u.$$

Puisque les complexes sont semi-bornés, on peut initier la construction en posant $s^k = 0$ pour k suffisament petit. Supposons tous les s^i construits pour $i < k$ et vérifiant :

$$ds^i + s^{i+1}d = u^i$$

pour $i < k-1$ et construisons s^k. On pose $g^{k-1} = u^{k-1} - ds^{k-1}$. Ainsi :

$$g^{k-1}d = du - ds^{k-1}d = du - d(u - ds) = 0$$

par hypothèse de récurrence. Par acyclicité de X, on peut donc factoriser g^{k-1} ainsi :

$$\begin{tikzcd} X^{k-2} \arrow[r] & X^{k-1} \arrow[r] \arrow[d, "g^{k-1}"'] & \operatorname{Im} d^{k-1} \arrow[r] \arrow[dl, dashed] & 0 \\ & I^{k-1} & & \end{tikzcd}$$

et comme $\operatorname{Im} d^{k-1} \subseteq X^k$ et I^{k-1} est injectif, on peut étendre cette flèche en une flèche $s^k : X^k \longrightarrow I^{k-1}$ et on a bien :

$$ds^{k-1} + s^k d = u^{k-1}$$

ce qui achève la récurrence.

□

II Construction d'un adjoint au foncteur de localisation

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne avec assez d'injectifs. Dans la section précédente, on a construit une équivalence de catégories :

$$\mathcal{H}^+(\mathcal{I}) \longrightarrow \mathcal{D}^+(\mathcal{A}).$$

Notons $\mathfrak{I}$ un quasi-inverse à cette équivalence de catégories. Concrêtement, le foncteur $\mathfrak{I}$ est donné par le choix d'une résolution de Cartan-Eilenberg (voir 8). On dispose alors d'un foncteur :

$$\mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{H}^+(\mathcal{I}) \hookrightarrow \mathcal{H}^+(\mathcal{A})$$

que l'on note encore $\mathfrak{I}$, et qui est *pleinement fidèle* comme composée de deux foncteurs pleinement fidèles.

Proposition 11. Le foncteur $\mathfrak{I}$ est adjoint à droite du foncteur Q :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}^+(\mathcal{A}) \arrow[d, shift right, "Q"'] \\ \mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \arrow[u, shift right, "\mathfrak{I}"'] \end{tikzcd}$$

Démonstration. □

Théorème 12. Soit $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un foncteur additif entre catégories abéliennes. On suppose que $\mathcal{A}$ possède assez d'injectifs.
Alors le foncteur :

$$RF = Q \circ F \circ \mathfrak{I} : \mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{D}^+(\mathcal{B})$$

est un foncteur dérivé total à droite de F, avec comme transformation naturelle canonique :

$$Q \circ F \xrightarrow{\eta} RF \circ Q$$

la transformation :

$$Q \circ F \longrightarrow Q \circ F \circ 1 \xrightarrow{Q \circ \kappa} Q \circ F \circ (\mathfrak{I} \circ Q) = RF \circ Q$$

via la transformation naturelle de Cartan-Eilenberg $\kappa : 1_{\mathcal{H}^+(\mathcal{A})} \longrightarrow \mathfrak{I} \circ Q$.

Démonstration. Soit $G : \mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{D}^+(\mathcal{B})$ un foncteur et $\alpha : Q \circ F \longrightarrow G \circ Q$ une transformation naturelle. En précomposant par $\mathfrak{I}$, on obtient :

$$RF = Q \circ F \circ \mathfrak{I} \longrightarrow G \circ Q \circ \mathfrak{I} \cong G.$$

Réciproquement, étant donné une transformation naturelle $RF \longrightarrow G$, on obtient une transformation naturelle $Q \circ F \xrightarrow{\eta} RF \circ Q \longrightarrow G \circ Q$. On vérifie formellement que ce sont des bijections réciproques. □

Une première application de la théorie des foncteurs dérivés est la simplicité de l'énoncé suivant.

Théorème 13. Soient $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B} \xrightarrow{G} \mathcal{C}$ des foncteurs exacts à gauche entre catégories abéliennes. On suppose que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ont assez d'injectifs et que l'image de tout injectif J de $\mathcal{A}$ par F est G-acyclique à droite (i.e. pour tout $i \geq 1$, $R^iG(F(J)) = 0$).
On a alors un isomorphisme de foncteurs :

$$R(G \circ F) \cong R(G) \circ R(F) : \mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{D}^+(\mathcal{C}).$$

Démonstration. On ne va pas montrer la naturalité, mais montrons que pour tout $X^\bullet$ dans $\mathcal{D}^+(\mathcal{A})$, on a bien un isomorphisme canonique dans la catégorie dérivée de $\mathcal{C}$:

$$R(G \circ F)(X^\bullet) \cong R(G) \circ R(F)(X^\bullet).$$

On choisit (fonctoriellement) un complexe $I^\bullet$ quasi-isomorphe à X et à termes injectifs. Ainsi :

$$R(F)(X^\bullet) = F(I^\bullet)$$

et

$$R(G \circ F)(X^\bullet) = G \circ F(I^\bullet)$$

dans les catégories dérivées (en omettant les foncteurs Q). Il suffit alors de montrer que :

$$R(G)(F(I^\bullet)) \cong G(F(I^\bullet))$$

dans la catégorie dérivée. Le lemme suivant donne exactement cela. $\square$

Lemme 14. Soit $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ un foncteur exact à gauche entre catégories abéliennes. On suppose que $\mathcal{A}$ possède assez d'injectifs et que $X^\bullet$ est un objet de $\mathcal{D}^+(\mathcal{A})$ à termes F-acycliques à droite. Alors on a un quasi-isomorphisme (canonique dans la catégorie dérivée) :

$$RF(X^\bullet) \cong F(X^\bullet).$$

Démonstration. On choisit un complexe double d'injectifs $I^{\bullet,\bullet}$ et une suite exacte de complexes :

$$0 \longrightarrow X^\bullet \longrightarrow I^{0,\bullet} \longrightarrow I^{1,\bullet} \longrightarrow \dots$$

Puisque les X^j sont F-acycliques à droite, les suites :

$$0 \longrightarrow FX^j \longrightarrow FI^{0,j} \longrightarrow FI^{1,j} \longrightarrow \dots$$

sont exactes (la cohomologie de ce complexe étant donnée par les $RF^i(X^j)$ qui sont nuls pour $i > 0$). Ainsi, par le corollaire 6, le morphisme canonique :

$$FX^\bullet \longrightarrow \mathrm{Tot}(FI^{\bullet,\bullet}) = F(\mathrm{Tot}(I^{\bullet,\bullet})) = RF(X^\bullet)$$

est un quasi-isomorphisme. $\square$

Corollaire 15. Dans la situation de 13, si F est de plus exact, alors on a pour tout A objet de $\mathcal{A}$:

$$R(G \circ F)(A) \cong R(G) \circ F(A).$$